机密 ★ 启用前

四川省2021年普通高校对口招生统一考试

数　学

本试题卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）。第Ⅰ卷1-3页，第Ⅱ卷3-4页，共4页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试题卷、草稿纸上答题无效。满分150分。考试时间120分钟。考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷　（共60分）

注意事项：

1. 必须使用2B铅笔在答题卡上将所选答案对应的标号涂黑。
2. 第Ⅰ卷共1大题，15小题，每小题4分，共60分。

一、选择题：本大题共15小题，每小题4分，共60分。在每小题列出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1. 设集合 $P=\{-1,0\}$，$Q=\{0,1,2\}$，则 $P\cup Q=$

A. $\{0\}$　　B. $\{-1,0\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{x-1}-3$ 的定义域是

A. $[1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[3,+\infty)$　　D. $(3,+\infty)$

3. $\sin 13°\cos 17°+\cos 13°\sin 17°=$

A. $\sin 4°$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 函数 $f(x)=\log_{0.5}(x-1)$ 的单调递减区间是

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

5. 不等式 $|x-2|<0.01$ 的解集为

A. $(1.99,2)$　　B. $(2,2.01)$

C. $(1.99,2.01)$　　D. $(-\infty,1.99)\cup(2.01,+\infty)$

6. 过点 $(4,-2)$ 且倾斜角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的直线的方程是

A. $y+2=\sqrt{3}(x-4)$　　B. $y+2=-\sqrt{3}(x-4)$

C. $y-2=\sqrt{3}(x+4)$　　D. $y-2=-\sqrt{3}(x+4)$

7. 函数 $y=4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cos x$ 的最小正周期是

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$

C. π　　D. 2π

8. 双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$ 的渐近线方程是

A. $y=\pm\dfrac{x}{2}$　　B. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

C. $y=\pm\sqrt{2}x$　　D. $y=\pm 2x$

9. 一个小型机械厂生产某种设备的数量 x（台）与利润 y（元）之间的关系是 $y=-20x^2+2200x$. 如果这家机械厂获得超过60000元的利润，那么生产该种设备的台数的范围是

A. $\{x\,|\,x>50,\ x\in N^*\}$　　B. $\{x\,|\,0<x<60,\ x\in N^*\}$

C. $\{x\,|\,50\leqslant x\leqslant 60,\ x\in N^*\}$　　D. $\{x\,|\,50<x<60,\ x\in N^*\}$

10. 已知椭圆 C 的右焦点为 $F(1,0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则椭圆 C 的标准方程为

A. $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$

C. $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　　D. $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

11. 某学校需从100名学生中选派40名到"烈士陵园"、"敬老院"、"社区"3个地方参加义务劳动，"烈士陵园"需20人，"敬老院"需10人，"社区"需10人，那么不同的选法的种数为

A. $\dfrac{C_{100}^{20}C_{80}^{10}C_{70}^{10}}{2}$　　B. $C_{100}^{20}C_{80}^{10}C_{70}^{10}$

C. $2C_{100}^{20}C_{80}^{10}C_{70}^{10}$　　D. $A_{100}^{20}A_{80}^{10}A_{70}^{10}$

12. 下列命题中不正确的是

A. 如果一条直线垂直于一个平面内的两条垂直直线，那么这条直线垂直于这个平面

B. 如果一条直线垂直于一个平面内的两条相交直线，那么这条直线垂直于这个平面

C. 如果一条直线垂直于一个平面内的任何一条直线，那么这条直线垂直于这个平面

D. 如果一条直线垂直于一个平面内的两条平行直线，那么这条直线垂直于这个平面

13. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则"$a>b$"是"$|a|>|b|$"的

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

14. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{19}$　　B. $\sqrt{29}$

C. $\sqrt{39}$　　D. 7

15. 若要将函数 $f(x)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象变为 $f(x)=\sin x$ 的图象，下述四种变换方式：

①将第一个函数的图象横坐标扩大为原来的 3 倍，再向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位；

②将第一个函数的图象横坐标扩大为原来的 3 倍，再向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位；

③将第一个函数的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位，再将横坐标扩大为原来的 3 倍；

④将第一个函数的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位，再将横坐标扩大为原来的 3 倍.

其中，所有正确变换方式的编号是

A. ①③　　B. ①④

C. ②③　　D. ②④

第Ⅱ卷　（共 90 分）

注意事项：

1. 必须使用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答。作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚。

2. 第Ⅱ卷共 2 大题，11 小题，共 90 分。

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

16. $\log_2 6-\log_2 3+\lg 5+\lg 2=$________.

17. 二项式 $(x^2+\dfrac{2}{x})^5$ 的展开式中 x^4 的系数是________（用数字作答）.

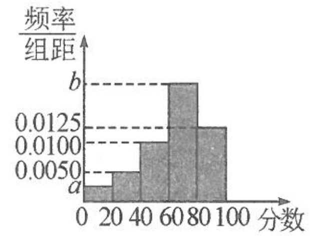
18. 某学校为了庆祝中国共产党建党 100 周年，计划对学校校门的梯形花坛进行美化．这个梯形花坛共有 10 排，计划第一排摆放 100 盆花，后面每排比前面一排少摆 10 盆，则该花坛摆满共需________盆花.

19. 设 F 是抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 都在该抛物线上，A，B，F 三点共线，且 y_1，y_2 是方程 $y^2-4\sqrt{3}y-4=0$ 的两根，O 为坐标原点，则 $\triangle OAB$ 的面积是________.

20. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=4-f(x)$，若函数 $y=\dfrac{1}{x}+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象的交点的坐标是 $(x_1,f(x_1)),(x_2,\ f(x_2)),\cdots,(x_{30},\ f(x_{30}))$，记 $x_i+f(x_i)=p_i$（其中 $i=1,2,\cdots,30$），则 $p_1+p_2+\cdots+p_{30}=$________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

21.（本小题满分 10 分）

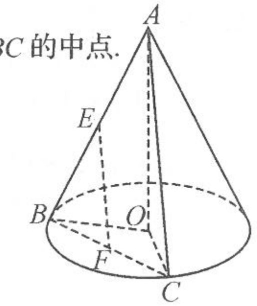


某校 100 名学生参加中华传统文化知识竞赛，将他们的分数按照 $[0,20)$，$[20,40)$，$[40,60)$，$[60,80)$，$[80,100]$ 分成 5 组，制成了如图所示的频率直方图，其中 $8a=b$.

（Ⅰ）求频率直方图中 a，b 的值；

（Ⅱ）采用分层抽样的方法，从分数在 $[40,60)$，$[60,80)$ 的学生中抽取容量为 6 的样本，再从这 6 个样本中随机抽取 2 个，求至少一人分数在 $[60,80)$ 的概率.

22.（本小题满分 12 分）



如图，B，C 为圆锥 AO 底面圆周上的两点，E，F 分别为 AB，BC 的中点.

（Ⅰ）证明：EF // 平面 ACO；

（Ⅱ）若圆锥底面半径为 1，母线的长为 $\sqrt{5}$，二面角 $B-AO-C$ 的大小为 $\dfrac{2\pi}{3}$，求点 O 到平面 ABC 的距离.

23.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a\sin A\cos C=b\cos A-a\cos A\sin C$.

（Ⅰ）求角 A 的大小；

（Ⅱ）若 $b=2\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABC}=3+\sqrt{3}$，求 $\cos C$.

24.（本小题满分 12 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_5=10$，$S_n=\dfrac{n+1}{2}a_n$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若数列 $b_n=\dfrac{1}{2^n}$，记 $c_n=a_nb_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

25.（本小题满分 12 分）

设圆 C 的圆心为 $C(a,b)$，半径为 $r\ (r>0)$．圆 C 与 x 轴相交于点 A，B，与 y 轴相交于点 M，N，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$|MN|=4$.

（Ⅰ）证明：$2b^2-a^2$ 为定值；

（Ⅱ）求圆心 $C(a,b)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离的最小值.

26.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），且 $f(2)=\dfrac{3}{5}$.

（Ⅰ）判断函数 $f(x)$ 的单调性，并说明理由；

（Ⅱ）证明：对于任意不小于 5 的正整数 n，都有 $f(n)>\dfrac{5n}{5n+2}$.

机密 ★ 启用前

四川省2021年普通高校对口招生统一考试

数学试题参考答案

一、选择题：本大题共15小题，每小题4分，共60分。

1. D	2. A	3. B	4. A	5. C
6. B	7. C	8. C	9. D	10. A
11. B	12. D	13. D	14. C	15. B

二、填空题：本大题共5小题，每小题4分，共20分。

16. 2	17. 40	18. 550	19. 4	20. 60

三、解答题：本大题共6小题，共70分。

21.（本小题满分10分）

（Ⅰ）由频率直方图可知，组距为20，

所以$(a+0.005+0.01+b+0.125)\times 20=1$.

又由$8a=b$，

解得$a=0.0025$，$b=0.02$.

（Ⅱ）分数在$[40,60)$，$[60,80)$的学生频率分别为0.01×20和0.02×20，

因此采用分层抽样的方法，从这两组中抽取容量为6的样本，

应从$[40,60)$中抽2人，从$[60,80)$中抽4人.

从这6个样本中随机抽取2个，至少一人分数在$[60,80)$的概率为

$\dfrac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}+\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{14}{15}$.

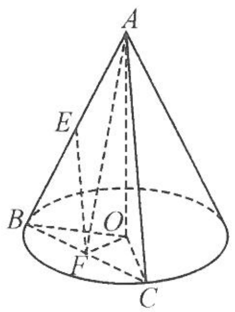
22.（本小题满分12分）

（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，E为AB中点，F为BC中点，

所以$EF/\!/AC$.

因为$AC\subset$平面ACO，$EF\not\subset$平面ACO，

$EF/\!/$平面ACO.



（Ⅱ）连结AF，FO.

在圆锥AO中，$AO\perp$底面BCO，

所以$AO\perp BO$，$AO\perp CO$.

$\angle BOC$为二面角$B-AO-C$的平面角，

即$\angle BOC=\dfrac{2}{3}\pi$.

在直角$\triangle ABO$中，$AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=2$.

在等腰$\triangle OBC$中，$FO=OB\cdot\cos\dfrac{\angle BOC}{2}=\dfrac{1}{2}$，$BC=2BF=2OB\cdot\sin\dfrac{\angle BOC}{2}=\sqrt{3}$.

在直角$\triangle AFO$中，$AF=\sqrt{AO^2+FO^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

$V_{A-BOC}=\dfrac{1}{3}\times AO\times S_{\triangle OBC}=\dfrac{1}{3}\times AO\times\dfrac{1}{2}\times BC\times FO=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

设点O到平面ABC的距离为d，

$V_{O-ABC}=\dfrac{1}{3}\times d\times S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}\times d\times\dfrac{1}{2}\times BC\times AF=\dfrac{\sqrt{51}}{12}d=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

所以点O到平面ABC的距离$d=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$.

23.（本小题满分12分）

（Ⅰ）由$a\sin A\cos C=b\cos A-a\cos A\sin C$可知，

$a\sin A\cos C+a\sin C\cos A=b\cos A$，

即$a\sin(A+C)=b\cos A$，

$a\sin B=b\cos A$，

$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\sin B}$.

由正弦定理可知$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

所以$\tan A=1$.

又因为A为三角形内角，

故$A=\dfrac{\pi}{4}$.

（Ⅱ）设$\triangle ABC$的AB边上的高为CD.

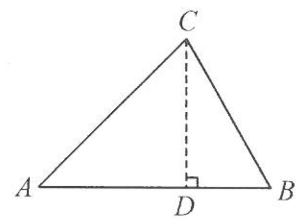
在直角$\triangle ACD$中，$A=\dfrac{\pi}{4}$，$AC=b=2\sqrt{3}$，

所以$AD=CD=\sqrt{6}$.

又因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD=3+\sqrt{3}$，

所以$AB=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$BD=\sqrt{2}$.

在直角$\triangle BCD$中，$\tan B=\dfrac{CD}{BD}=\sqrt{3}$，



故$B=\dfrac{\pi}{3}$.

因此$C=\pi-A-B=\pi-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{12}\pi$，

$\cos C=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

24.（本小题满分12分）

（Ⅰ）由等差数列前n项和公式$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$及已知条件有

$\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n+1}{2}a_n$，

解之得 $a_n=na_1$.

由 $a_5=10$，得 $10=5a_1$，即 $a_1=2$.

又由 $a_5=a_1+4d=10$，可得 $d=2$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

$a_n=a_1+(n-1)d=2n$.

（Ⅱ）$c_n=a_nb_n=2n\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

$$T_n=c_1+c_2+c_3+c_4+\cdots+c_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3+c_4+\cdots+c_n)=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n},$$

$$T_n-\frac{1}{2}T_n=\left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right)$$

$$=1+\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{2}{2^2}\right)+\left(\frac{4}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n}{2^n}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}$$

$$=2-\frac{2+n}{2^n},$$

所以 $T_n=4-\dfrac{2+n}{2^{n-1}}$.

25.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意知，$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，从而，

$\triangle CAB$ 是以 C 为直角顶点的等腰直角三角形，

所以 $|b|^2+|b|^2=r^2$. ①

$\triangle CMN$ 是等腰三角形，$|CM|=|CN|=r,|MN|=4$，

所以 $|a|^2+2^2=r^2$. ②

由①②可得，$2b^2-a^2=4$.

（Ⅱ）设圆心 $C(a,b)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离为 d，则

$d=\dfrac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$，$|a-2b|=\sqrt{5}d$.

所以 $a-2b=\pm\sqrt{5}d$.

即 $a=2b\pm\sqrt{5}d$.

将 $a=2b\pm\sqrt{5}d$ 代入方程 $2b^2-a^2=4$，可得

$2b^2-(2b\pm\sqrt{5}d)^2=4$.

整理，得 $2b^2\pm4\sqrt{5}d\cdot b+5d^2+4=0$.

因为 b 为实数，

所以此方程的判别式 $\Delta=(\pm4\sqrt{5}d)^2-8(5d^2+4)\geqslant0$.

注意到 $d>0$，解得 $d\geqslant\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$（当且仅当 $b=2$，$a=2$ 或 $b=-2$，$a=-2$ 时取等号）.

故所求距离的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

26.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$f(2)=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}=\dfrac{3}{5}$. 解得 $a^2=4$.

又由 $a>0$ 且 $a\neq1$ 得，$a=2$.

$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=1-\dfrac{2}{2^x+1}$.

设 $x_1<x_2$，则由 $y=2^x$ 是增函数知，$2^{x_1}-2^{x_2}<0$. 从而，

$$f(x_1)-f(x_2)=(1-\frac{2}{2^{x_1}+1})-(1-\frac{2}{2^{x_2}+1})$$

$$=\frac{2}{2^{x_2}+1}-\frac{2}{2^{x_1}+1}$$

$$=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_2}+1)(2^{x_1}+1)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

（Ⅱ）$f(n)-\dfrac{5n}{5n+2}=1-\dfrac{2}{2^n+1}-(1-\dfrac{2}{5n+2})$

$$=\frac{2}{5n+2}-\frac{2}{2^n+1}$$

$$=\frac{2(2^n-5n-1)}{(5n+2)(2^n+1)}.$$

下面证明：当 $n\geqslant5$ 时，$2^n>5n+1$. 由二项式定理可知，

$$2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$$

$$>C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3$$

$$=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$=1+n+\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

$$=1+n+\frac{n(n^2-1)}{6}$$

$$\geqslant1+n+\frac{n(5^2-1)}{6}$$

$$=5n+1.$$